PART3 根号を含む式の計算

要点① 平方根

2乗すると a になる数を，a の「　　　　　」という。

$a>0$ のとき，a の平方根のうち正の方を　　，負の方を　　　と表す。これらをまとめて　　と表すことができる。記号 $\sqrt{}$ を根号といい，$\sqrt{a}$ をルート a と読む。

$a=0$ のとき，a すなわち 0 の平方根は 0 だけであり，$\sqrt{0}=0$ とする。

どのような実数も，2乗すると 0 以上になり，負の数になることはない。したがって，$a<0$ のとき，a の平方根は，実数の範囲では存在しない。

例 2の平方根は　　と　　　である(2つをまとめて　　　と表すことができる)。

$\sqrt{9}$ は9の　　　　　　　であり，$-\sqrt{9}$ は9の　　　　　　　である。

よって $\sqrt{9}=$　，$-\sqrt{9}=$　　である。

$(\sqrt{5})^2=$　，$(-\sqrt{5})^2=$　である。

また，$\sqrt{6^2}=\sqrt{36}=$　，$\sqrt{(-6)^2}=\sqrt{36}=$　である。

一般に，次のことが成り立つ。

1　$a\geqq 0$ のとき　$(\sqrt{a})^2=a$，$(-\sqrt{a})^2=a$

2　$a\geqq 0$ のとき　$\sqrt{a^2}=a$
　　$a<0$ のとき　$\sqrt{a^2}=-a$
　　すなわち $\sqrt{a^2}=|a|$

要点② 平方根の積と商

平方根の積と商について，次のことが成り立つ。

$a>0$，$b>0$，$k>0$ のとき

1 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$　**2** $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$　**3** $\sqrt{k^2a}=k\sqrt{a}$

1 の証明

$\sqrt{a}\sqrt{b}$ を2乗すると

$$(\sqrt{a}\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2=$$

ここで，$\sqrt{a}>0$，$\sqrt{b}>0$ より，$\sqrt{a}\sqrt{b}>0$

よって，$\sqrt{a}\sqrt{b}$ は　　の　　　　　　　　である。

したがって，$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

2 も同様に証明することができる。

1 より $\sqrt{k^2a}=$　　　　　$=k\sqrt{a}$ であるから，**3** も成立。

例 $\sqrt{2}\sqrt{3}=$　　　　　　　　$\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}=$

$\sqrt{80}=$

要点③ 分母の有理化

「分母の有理化」… 分母に根号を含む式を変形し，分母に根号を含まない式にすること

例 $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}\qquad\qquad}=\dfrac{\sqrt{35}}{5}$

分母が $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ や $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ の形の場合は，乗法公式

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$$

を用いて分母を有理化することができる。

例 $\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\qquad\qquad\qquad}$

3 (1) 次の式を計算せよ。

(i) $\sqrt{2}\times\sqrt{6}$　(ii) $\sqrt{12}-\sqrt{27}$

(iii) $(\sqrt{5}-2\sqrt{2})^2$　(iv) $(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)$

(2) 次の式の分母を有理化せよ。

(i) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$　(ii) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}$　(iii) $\dfrac{4}{3+\sqrt{7}}$

Point Pickup

根号を含む式の計算

・$\sqrt{}$ の中を素因数分解し，$\sqrt{k^2a}=k\sqrt{a}$ を用いて，$\sqrt{}$ の中の数を小さくする。

・$(\sqrt{a})^2=a$，$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$，$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ と乗法公式を用いて，文字式と同じように四則計算を行う。

分母の有理化

$(\sqrt{a})^2=a$，$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=$ 　　を利用し，分母に根号を含まない形に。

第 3 講　PART3 確認問題

次の式を計算をせよ。

1 $\sqrt{6}\times\sqrt{3}=\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}$

2 $\sqrt{8}-\sqrt{18}=\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}$

3 $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=\boxed{オ}-\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キ}}$

4 $(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)=\boxed{ク}$

次の式の分母を有理化せよ。

5 $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{\boxed{ケコ}}}{\boxed{サ}}$

6 $\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{\boxed{シ}}-\sqrt{\boxed{ス}}}{\boxed{セ}}$

7 $\dfrac{4}{3-\sqrt{5}}=\boxed{ソ}+\sqrt{\boxed{タ}}$

PART3 根号を含む式の計算

3 (1) 次の式を計算せよ。

(i) $\sqrt{2}\times\sqrt{6}$　　(ii) $\sqrt{12}-\sqrt{27}$

(iii) $(\sqrt{5}-2\sqrt{2})^2$　　(iv) $(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)$

(2) 次の式の分母を有理化せよ。

(i) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$　　(ii) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}$　　(iii) $\dfrac{4}{3+\sqrt{7}}$

[解答]

(1)(i) $\sqrt{2}\times\sqrt{6}=\sqrt{2}\times\sqrt{2\cdot3}=\sqrt{2^2\cdot3}=2\sqrt{3}$

(ii) $\sqrt{12}-\sqrt{27}=2\sqrt{3}-3\sqrt{3}=-\sqrt{3}$

(iii) $(\sqrt{5}-2\sqrt{2})^2=(\sqrt{5})^2-2\cdot\sqrt{5}\cdot2\sqrt{2}+(2\sqrt{2})^2=5-4\sqrt{10}+8=13-4\sqrt{10}$

(iv) $(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)=(\sqrt{7})^2-2^2=7-4=3$

(2)(i) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{2}=\sqrt{6}$

(ii) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{(\sqrt{2}-\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{6})}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2-6}=-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(別解)

$$\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}=-\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{6-2}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(iii) $\dfrac{4}{3+\sqrt{7}}=\dfrac{4(3-\sqrt{7})}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})}=\dfrac{4(3-\sqrt{7})}{9-7}=\dfrac{4(3-\sqrt{7})}{2}=2(3-\sqrt{7})=6-2\sqrt{7}$

第 3 講　PART3 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：3，イ：2

[解説]

$$\sqrt{6}\times\sqrt{3}=\sqrt{6\times3}$$ [A]

$$=\sqrt{3^2\times2}=\mathbf{3\sqrt{2}}$$ [B]

[A]　$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

[B]　$k>0$ のとき，
$\sqrt{k^2a}=k\sqrt{a}$

2 **[正解]** ウ：－，エ：2

[解説]

$$\sqrt{8}-\sqrt{18}=\sqrt{2^2\times2}-\sqrt{3^2\times2}$$ [C]

$$=2\sqrt{2}-3\sqrt{2}=\mathbf{-\sqrt{2}}$$

[C]　$k>0$ のとき，
$\sqrt{k^2a}=k\sqrt{a}$

3 **[正解]** オ：5，カ：2，キ：6

[解説]

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2$$ [D]

$$=3-2\sqrt{6}+2=\mathbf{5-2\sqrt{6}}$$

[D]　展開の公式
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
を利用する。

4 **[正解]** ク：4

[解説]

$$(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)=(\sqrt{5})^2-1^2=5-1=\mathbf{4}$$ [E]

[E]　展開の公式
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
を利用する。

5 **[正解]** ケコ：15，サ：3

[解説]

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\mathbf{\frac{\sqrt{15}}{3}}$$ [F]

[F]　分母・分子に $\sqrt{3}$ をかけ，$(\sqrt{a})^2=a$ を利用し，分母を有理化する。

6 [正解] シ：7，ス：2，セ：5

[解説]

$$\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}=\frac{1\times(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})}$$ [G]

$$=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{7-2}$$

$$=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{5}$$

[G]　分母・分子に $\sqrt{7}-\sqrt{2}$ をかけ，$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$ を利用し，分母を有理化する。

7 [正解] ソ：3，タ：5

[解説]

$$\frac{4}{3-\sqrt{5}}=\frac{4(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}$$ [H]

$$=\frac{4(3+\sqrt{5})}{3^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{4(3+\sqrt{5})}{9-5}=3+\sqrt{5}$$

[H]　分母・分子に $3+\sqrt{5}$ をかけ，分母を有理化する。